Corso di Economia Applicata all’ingegneria

# La simulazione Monte Carlo: appunti integrativi[1]

a cura di Ettore Bolisani e Roberto Galvan

## 1. Definizione e origini

La *simulazione* consiste nello studio del comportamento di un sistema (nell’accezione ampia del termine) mediante la sua riproduzione in un contesto controllabile. Nella simulazione al calcolatore si costruisce un modello matematico costituito da equazioni che descrivono le relazioni tra le componenti del sistema oggetto di studio e il loro legame con il suo funzionamento/comportamento, con l’obiettivo di effettuare esperimenti “virtuali” sul modello matematico assumendo che i risultati di tali esperimenti costituiscano una “riproduzione” sufficientemente accurata del comportamento che avrebbe il sistema. Questo allo scopo di accrescere la comprensione del suo funzionamento, verificare (o negare) la validità di ipotesi su di esso, raccogliere informazioni per poter formulare possibili previsioni, per implementare meccanismi di controllo del sistema modellato, ecc.

Un utilizzo particolare della simulazione si ha nella tecnica Monte Carlo di cui ci occuperemo qui. Questa tecnica viene utilizzata per riprodurre e risolvere numericamente un problema in cui sono coinvolte anche variabili aleatorie, e la cui soluzione per via analitica risulta troppo complessa o impossibile (Niederreiter, 1992; James, 1980; Halton, 1970). Inoltre, l’uso della simulazione consente di testare più facilmente e con elevato grado di dettaglio gli effetti di modificazioni nelle variabili di ingresso (ad es. nelle loro descrizioni statistiche) o nella funzione di output.

Secondo alcuni le origini storiche del metodo Monte Carlo potrebbero essere addirittura fatte risalire al ‘700, ben prima cioè dell’avvento dei calcolatori[2]. Nel ‘900 il metodo fu ampiamente utilizzato nella ricerca nucleare[3], potendosi poi avvalere, a partire dagli anni ’40, della nascente tecnologia dei calcolatori elettronici.

Oggi il metodo Monte Carlo trova applicazione in vari ambiti scientifici. La prima applicazione alla valutazione degli investimenti è probabilmente dovuta a David Hertz che nel suo articolo “*Risk analysis in capital investment”* del 1964 propone la tecnica per valutare un progetto di espansione di un impianto chimico. La simulazione Monte Carlo è ormai diffusamente trattata come tecnica di analisi del rischio nella valutazione degli investimenti nei manuali di economia applicata all’ingegneria.

---

[1] Non citare. Scopo di questo testo è unicamente quello di fornire alcuni elementi integrativi sulla tecnica Monte Carlo applicata agli investimenti. Per precisazioni e approfondimenti si rinvia alla letteratura specializzata. Alcuni riferimenti essenziali sono riportati nel testo.

[2] Nel 1777 il matematico francese George Louis Leclerc de Buffon descrive nella sua opera *Essai d’Arithmetique morale* un esperimento di stima del valore di $\pi$ tramite una “simulazione” casuale basata sul lancio di uno spillo, ottenendo un risultato di buona precisione numerica per l’epoca.

[3] Lo stesso Enrico Fermi all'inizio degli anni ‘30 sosteneva di utilizzare stime ottenute con tecniche di campionamento statistico per lo studio del moto dei neutroni. Il metodo Monte Carlo fu formalizzato negli anni ’40 da J. Von Neumann e S. Ulam che partecipavano al progetto Manhattan per lo studio della dinamica delle esplosioni nucleari (cfr. Eckhardt, 1987); lo stesso von Neumann è poi considerato l’inventore del calcolatore elettronico. A quanto pare, il nome “Monte Carlo” fu coniato da N. Metropolis in riferimento naturalmente al celebre casinò, sede per antonomasia dell’aleatorietà (Metropolis e Ulam, 1949).

## 2. Descrizione della tecnica e aspetti implementativi

Nella descrizione della tecnica Monte Carlo ci riferiamo qui implicitamente al caso di valutazione di investimento in condizioni di rischio, ossia nella situazione in cui le previsioni dei flussi di cassa dell'investimento sono legate a parametri o variabili statistiche. Il metodo Monte Carlo permette di ottenere una stima dell'intera distribuzione di probabilità dell'output scelto come indicatore della convenienza dell'investimento (valore attuale, tasso interno di rendimento, ecc.) e non solo una singola stima puntuale; ciò permette anche di misurare in qualche modo il rischio del progetto di investimento sulla base della dispersione statistica dell'indicatore (fg. 1).

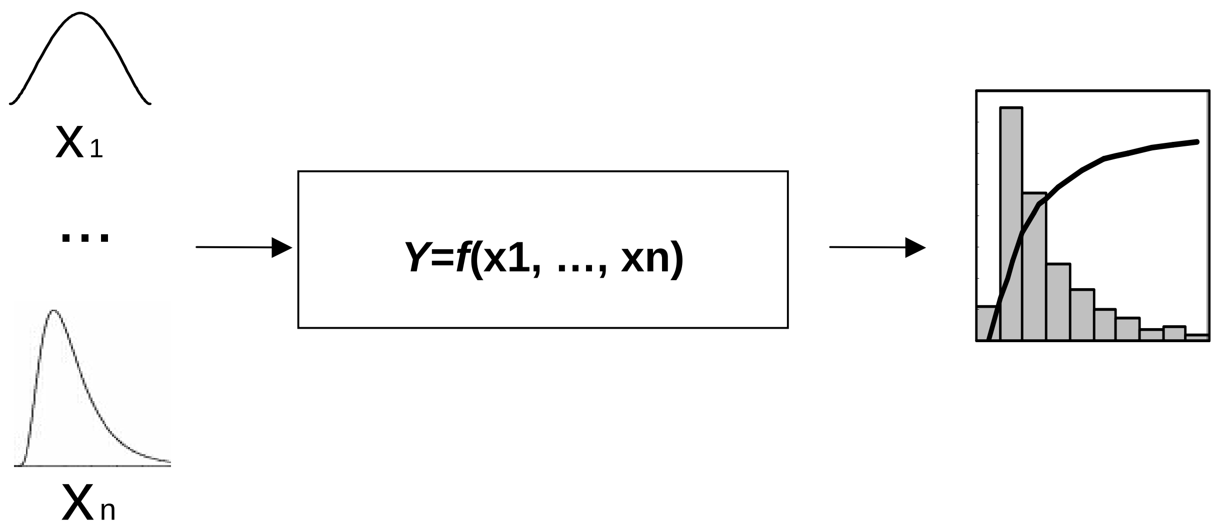


***fig. 1. Scopo della simulazione Monte Carlo***

Gli elementi principali della tecnica possono essere così sommariamente descritti (cfr. fig. 2):

*Parametri:* input specificati dal decisore/analista dell'investimento, e quindi controllabili.
*Variabili di input esogene:* variabili di ingresso che dipendono da eventi che non sono sotto il controllo del decisore, il cui andamento è però descrivibile in termini probabilistici.
*Variabili di output:* rappresentano i risultati della simulazione; nel caso specifico di interesse qui, si tratta degli indicatori utilizzati per misurare la validità dell'investimento (valore attuale, tasso interno di rendimento, ecc.)
*Modello:* equazioni matematiche (funzioni dei parametri e delle variabili di input) che descrivono le relazioni tra le componenti del sistema/problema e definiscono il legame degli output con i parametri e le variabili di input.

In pratica, il metodo Monte Carlo si basa sul fatto che una soluzione analitica diretta del problema, che permetta cioè di esplicitare direttamente il legame dell'output che si desidera ottenere con i dati di ingresso, può essere troppo onerosa o magari impossibile. Il problema viene quindi risolto numericamente, producendo un numero N sufficientemente elevato di possibili combinazioni dei valori che le variabili di ingresso possono assumere e calcolandone il relativo output sulla base delle equazioni del modello. Per costruire ciascuna delle N combinazioni viene generato (ossia "estratto") casualmente un valore per ciascuna variabile di input, in accordo con la distribuzione di probabilità specificata e rispettando le correlazioni tra variabili. Ripetendo al calcolatore N volte questo procedimento (con N abbastanza "grande" da permettere risultati statisticamente affidabili) otterremo N valori indipendenti delle variabili di output, che rappresentano dunque un *campione* dei possibili valori assumibili dall'output, campione che potrà venire analizzato con tecniche statistiche per stimarne i parametri descrittivi, riprodurre istogrammi delle frequenze, e ricavare numericamente gli andamenti delle funzioni di distribuzione dell'output.

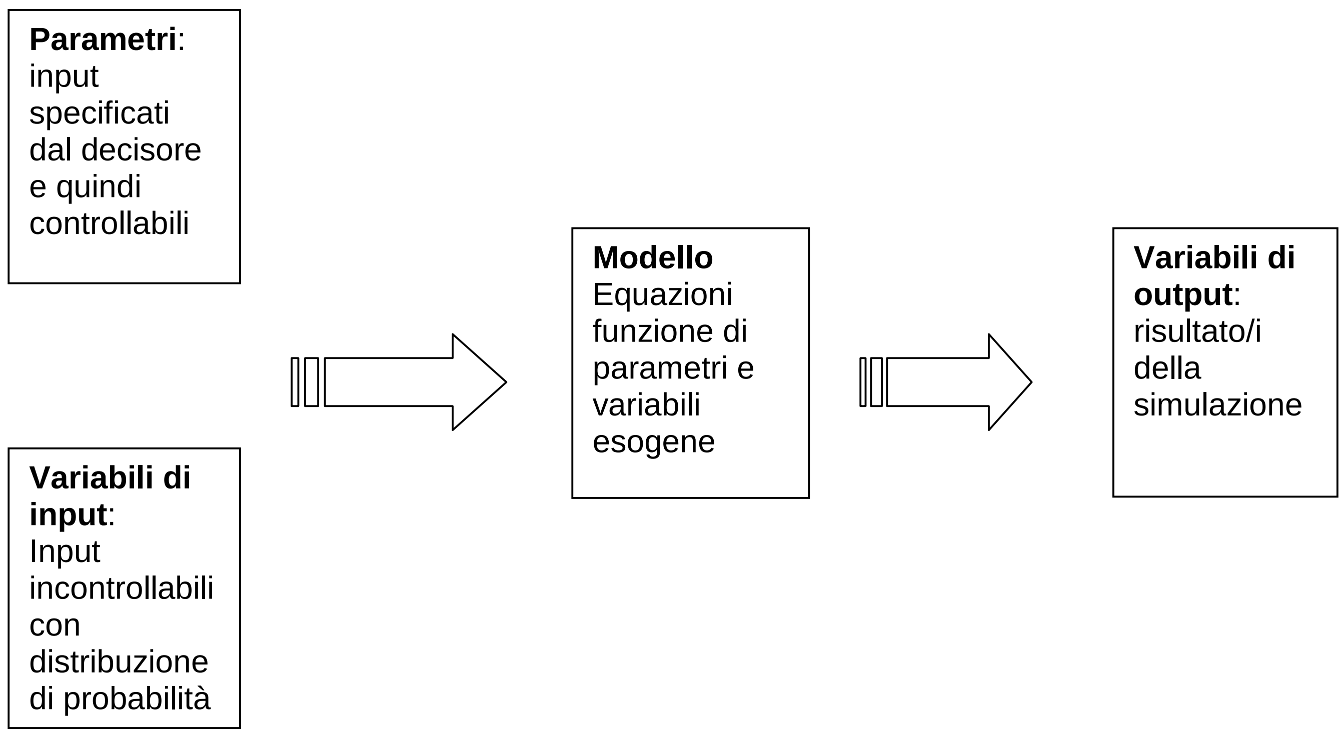


***fig. 2. Gli elementi della simulazione Monte Carlo***

I passi fondamentali per l'applicazione del metodo possono essere così sinteticamente descritti.

a. *Identificazione delle variabili esogene e dei parametri*
Si tratta qui di individuare i dati di interesse, cioè gli elementi critici dai quali dipende il valore economico del progetto. A questo riguardo, va ricordato che anche se uno dei pregi del metodo è proprio quello di consentire di includere nel modello un numero anche elevato di parametri e variabili per cogliere la complessità della realtà, va ricercato il trade-off più adeguato tra accuratezza e semplicità di implementazione, ed è quindi opportuno selezionare solo le variabili davvero rilevanti per l'analisi. A volte viene suggerito un pre-esame che permetta di selezionare, ad es. con tecniche di

analisi di sensitività, le variabili che potenzialmente potrebbero avere un impatto significativo sui risultati.

b. *Definizione del modello*
Occorre esplicitare le relazioni matematiche che consentono di determinare il risultato desiderato (cioè le variabili di ouput, ad esempio il PW o il TIR) in funzione delle variabili di input e dei parametri. È inoltre importante che il modello consideri esplicitamente le correlazioni tra le variabili (analizzeremo la questione esplicitamente nel paragrafo 3.4). Anche in questo caso si possono ripetere le considerazioni indicate nel punto a. relativamente al giusto equilibrio tra rappresentatività e semplicità del modello. I passi a. e b. rappresentano forse gli aspetti più critici del procedimento, dato che da essi dipende la qualità dei risultati e anche la loro corretta interpretazione.

c. *Attribuzione delle distribuzioni di probabilità*
È necessario poi specificare la distribuzione di probabilità di ogni variabile di input. La distribuzione può essere assegnata basandosi su dati quantitativi oppure può essere assegnata in modo soggettivo dal decisore eventualmente tramite la consultazione di esperti con metodi appropriati.

d. *Impostazione delle simulazioni. Effettuazione degli esperimenti*
A questo punto si procede definendo il piano degli esperimenti, fissando il numero di iterazioni da eseguire, stabilendo il modo adeguato per riprodurre numericamente nel calcolatore le funzioni statistiche delle variabili di ingresso, implementando gli algoritmi di generazione dei numeri pseudocasuali (cfr. più avanti), ecc. Diventa quindi possibile effettuare le simulazioni pianificate al calcolatore e ottenere il campione dei valori assunti dalle variabili di output.

e. *Verifiche dei risultati; produzione dei rapporti finali*
Al termine delle simulazioni possono seguire alcune verifiche al fine di valutare eventuali problemi con il procedimento implementato; nel caso, può essere necessario ripetere alcune delle fasi precedenti al fine ad es. di tarare il modello, rivedere i dati di input, pianificare altri esperimenti, selezionare altri output ecc. Al termine del lavoro verranno prodotti dei rapporti finali che esprimono (numericamente e/o graficamente) i risultati del metodo, ossia le analisi statistiche delle variabili di output su cui il decisore si baserà per le scelte relative all’investimento.

## 3. Problematiche specifiche

### 3.1. *Assunzioni alla base del modello*
La bontà o meno della simulazione Monte Carlo dipende in primo luogo dalle assunzioni alla base del modello e dalle conseguenti equazioni che esprimono le relazioni matematiche tra le variabili di input e quelle di output. Ad esempio, nell’analisi di un investimento è necessario selezionare le variabili che vengono giudicate rilevanti ai fini dei risultati che esso può generare e quindi ai fini della valutazione. Si deve poi scegliere il grado di dettaglio con cui il modello del problema viene costruito. Si devono specificare le variabili che il decisore può controllare (quelle che abbiamo chiamato i *parametri*) e identificare quelle invece che dipendono da eventi esterni incontrollabili (le *variabili di input*). Inoltre, si devono identificare le variabili il cui andamento può essere effettivamente descritto in modo statistico, e quelle che invece non è possibile o non ha senso descrivere come variabili aleatorie; si devono individuare e determinare le funzioni che meglio descrivono gli andamenti nel tempo di tali variabili, evidenziare le correlazioni tra le variabili che possono essere significative ai fini dell’analisi,

ecc. Tutto ciò è necessario per ottenere un modello sufficientemente semplice per essere comprensibile e renderlo utilizzabile in pratica, e tuttavia le semplificazioni possono dare una visione eccessivamente riduttiva del problema oggetto di esame o a una sottovalutazione di aspetti importanti, cosa che può portare a conclusioni errate sui risultati delle simulazioni. In definitiva, la costruzione del modello risulta una fase critica e influenza largamente l'efficacia del modello stesso e la validità dei risultati delle simulazioni ai fini decisionali.

### 3.2. *Assegnazione delle probabilità alle variabili di input*

Un'altra evidente difficoltà che si incontra nella simulazione Monte Carlo è l'assegnazione delle descrizioni probabilistiche agli eventi aleatori che determinano i valori della variabili di input; ossia in pratica determinare per queste variabili una stima appropriata delle loro distribuzioni statistiche.
Per alcuni tipi di eventi o fattori sono disponibili serie storiche di valori ricavate dall'esperienza. Nelle attività economiche sono ad esempio spesso disponibili in azienda (o sono reperibili) registrazioni di eventi passati (riferiti a fatti economici – prezzi, domanda, ecc.; al funzionamenti di macchinari – tempi di lavorazione, tempi di guasto, ecc.; ad eventi legati all'ambiente, ecc.) che costituiscono quindi serie storiche di dati che possono risultare utili all'analisi di un nuovo investimento. In questo caso, una possibilità è quella di utilizzare tecniche statistiche per eseguire un *"best fit"* delle serie storiche dei dati agli andamenti di funzioni di distribuzione predefinite. Un'altra possibilità è quella di utilizzare tecniche non parametriche come il metodo del *ricampionamento.* L'idea di base di questa tecnica è la seguente: vengono estratti in modo casuale (con reimmissione) i valori direttamente dalle serie di dati originali. Un indubbio vantaggio di tale metodo è il fatto di permettere di catturare tutte le complesse correlazioni fra le variabili ma senza dover individuare in anticipo la funzione di distribuzione statistica a cui i dati meglio si adattano. Un limite di questo sistema, tipico peraltro di tutte le situazioni in cui si usano serie storiche per formulare previsioni, è che la sua validità dipende dalla misura in cui i dati che si riferiscono al passato siano rappresentativi di eventi futuri.
Quando non sono disponibili dati storici, è possibile affidarsi ad un giudizio soggettivo, ossia a una valutazione soggettiva della probabilità[4]. L'uso delle probabilità soggettive è frequente in campo economico, compresa la valutazione degli investimenti[5]. Per stimare le probabilità soggettive, secondo un metodo molto usato il decisore fissa (o chiede a un esperto) i possibili valori che la variabile in oggetto può assumere, associati alla relativa probabilità cumulata, ottenendo così una varabile casuale discreta. Per specificare invece una distribuzione continua sono stati messi a punto vari metodi. Il primo, elaborato da Raiffa, consiste nello stimare (o far stimare dall'esperto consultato) il valore che dovrebbe assumere la variabile in esame per alcuni quantili della distribuzione (ad esempio: 1%, 25%, 50%, 75%, 99%). L'intera curva di probabilità cumulata sarà poi ottenuta interpolano i punti stimati. Un metodo alternativo proposto da Kabus consiste nello specificare un istogramma con le frequenze relative. Un altro metodo, semplice e di frequente utilizzo, consiste nello stimare (o far stimare dall'esperto) tre valori per la variabile in oggetto: una stima "pessimistica" (ossia del caso peggiore), una stima "ottimistica" (ovvero del caso migliore) e una stima "realistica" (cioè ritenuta più probabile); tali valori costituiranno poi i valori estremi e quello maggiormente probabile per costruire una distribuzione triangolare.

---

[4] In questi termini, secondo la definizione proposta dal matematico De Finetti negli anni '70, la probabilità soggettiva di un evento è *la misura del "grado di fiducia" che un individuo attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi dell'evento stesso.*
[5] Cfr. Hertz e Thomas, 1983; v. anche Gottardi, 1990.

### 3.3. *Algoritmi per la generazione di numeri casuali*

La generazione di numeri casuali è un aspetto centrale nella simulazione Monte Carlo. Come dicevamo, infatti, per poter effettuare N esperimenti di simulazione (al fine di ottenere il campione dei valori delle variabili di output da poter poi analizzare statisticamente) è necessario generare casualmente N combinazioni delle variabili di input che rispettino le rispettive funzioni di probabilità e le eventuali correlazioni. Ciò deve venire effettuato dal calcolatore con determinati algoritmi che possono basarsi su tre categorie di numeri:

- numeri "veramente" casuali, che derivano da misure di fenomeni fisici intrinsecamente aleatori (come ad esempio il decadimento radioattivo di un nucleo atomico o le variazioni di emissione termoionica di una valvola). Sono anche disponibili serie di questi numeri pubblicate su manuali specializzati, e che possono essere utilizzate per predisporre tabelle all'interno delle quali un apposito programma al calcolatore andrà a pescare;
- numeri pseudocasuali: sono serie generate direttamente dal calcolatore secondo un determinato algoritmo. Si tratta della modalità di operare più diffusa;
- numeri "quasi" casuali: sono anch'essi prodotti da un algoritmo, tuttavia con l'obiettivo di non rappresentare una vera sequenza casuale ma una serie di numeri disposti in maniera uniforme.

Generalmente, i calcolatori utilizzano una funzione predefinita di generazione di numeri pseudocasuali che riproduce una distribuzione uniforme[6]. È possibile anche generare sequenze che riproducono distribuzioni non uniformi usando ad esempio il metodo della *funzione di ripartizione inversa*[7]. Si comprende evidentemente come in realtà creare numeri casuali con un algoritmo deterministico sia in sostanza virtualmente impossibile[8]. I numeri casuali generati da un calcolatore tuttavia sono ritenuti tali nella misura in cui essi soddisfano i requisiti statistici (in termini di frequenze di estrazione) di cui godono i numeri veramente casuali.

### 3.4. *Correlazioni tra variabili di input*

Un aspetto molto importante da tenere in considerazione quando si costruisce un modello è la possibile correlazione fra le variabili in input. Anche se spesso si assume per comodità che tutte le variabili siano tra loro indipendenti, questa è un'ipotesi che molto spesso è irrealistica. Ad esempio, nel progetto di investimento in un nuovo prodotto è molto probabile che la variabile "domanda" sia legata alla variabile "prezzo".

---

[6] Per la precisione, si usa il cosiddetto *generatore lineare congruente*: a partire da un valore $X_0$ preassegnato viene generata una serie di numeri casuali Ui uniformante distribuiti [0,1] utilizzando l'algoritmo iterativo:

$X_i = (a X_{i-1} + c) \bmod m$

$U_i = X_i / m$

dove a, c, m sono parametri preimpostati. La sequenza si ripete identica con un periodo di lunghezza m. Per questo i parametri prima indicati vengono fissati in modo da rendere il periodo sufficientemente lungo (in relazione agli scopi specifici di impiego) così che la sequenza prodotta possa essere usata come un'accettabile simulazione di una serie di estrazioni aleatorie.

[7] Si tratta di un metodo teoricamente valido in generale. Nota la funzione di distribuzione di interesse F(x), se ne ricava analiticamente l'espressione inversa $F^{-1}(u)$. Si genera poi una sequenza di numeri pseudocasuali uniformemente distribuiti $x_1, \ldots, x_n$ dalla quale si calcola la sequenza $x_1= F^{-1}(u_1), \ldots, x_n = F^{-1}(u_n)$ che riproduce una sequenza pseudocasuale che simula la distribuzione F desiderata. Il metodo non è però utilizzabile per funzioni di distribuzione di cui non è possibile calcolare analiticamente l'inversa, come in particolare la ben nota distribuzione normale. In questo caso si deve ricorrere ad altri procedimenti (cfr. anche Galvan, 2004).

[8] Come ha affermato efficacemente Von Neumann (1951) "Anyone attempting to generate random numbers by deterministic means is, of course, living in a state of sin." [Chiunque tenti di generare numeri casuali attraverso metodi deterministici è chiaramente in errore]

Il problema della correlazione richiede trattamenti specifici, non sempre agevoli (salvo introdurre forti semplificazioni che potrebbero peraltro invalidare la significatività dei risultati stessi). Un metodo "soggettivo", proposto da Hertz, è detto *campionamento condizionato*. Considerate due variabili legate tra loro, di cui una si può ritenere indipendente e l'altra dipendente, l'idea è di dividere in intervalli i possibili valori che la variabile indipendente può assumere, e ad ogni intervallo è poi associata (tramite procedimenti basati su probabilità soggettive) una distribuzione di probabilità per la variabile dipendente. Nell'effettuare le simulazioni Monte Carlo, ad ogni iterazione viene prima generato un valore per la variabile indipendente, e tale valore determina una specifica distribuzione dalla quale generare il valore della variabile dipendente.
I metodi analitici (come ad es. il procedimento che consiste nell'esplicitare direttamente nel modello la relazione analitica che lega la variabile dipendente in funzione di quella indipendente, ottenuta ad esempio attraverso un'analisi di regressione) sono generalmente complessi da applicare[9]. Naturalmente il procedimento più idoneo andrà adottato a seconda della specifica applicazione. In generale comunque si comprende come la questione risulti complessa sia concettualmente sia per quel che riguarda gli aspetti implementativi; inoltre il modo con cui viene esplicitata la correlazione tra variabili può influenzare in modo rilevante i risultati della simulazione.

### 3.5. *Numero di iterazioni necessarie*

Come dicevamo, anche la (o le) variabile di output è una variabile casuale; con il metodo Monte Carlo non si ottiene però una formulazione analitica, ma un *campione* di valori la cui frequenza permette di ricavare un'indicazione approssimata della distribuzione di probabilità di tale variabile. Ne consegue che non è nemmeno possibile calcolare con esattezza gli indicatori statistici di interesse (ad esempio media e deviazione standard).
È peraltro dimostrato che aumentando il numero di simulazioni otteniamo un campione più grande e quindi maggior precisione e accuratezza (si tratta in pratica di un'applicazione del noto teorema del limite centrale). In pratica, all'aumentare del numero di iterazioni si ha una convergenza dell'output verso i valori che sarebbero analiticamente "esatti" (cfr. l'esempio di fig. 3).

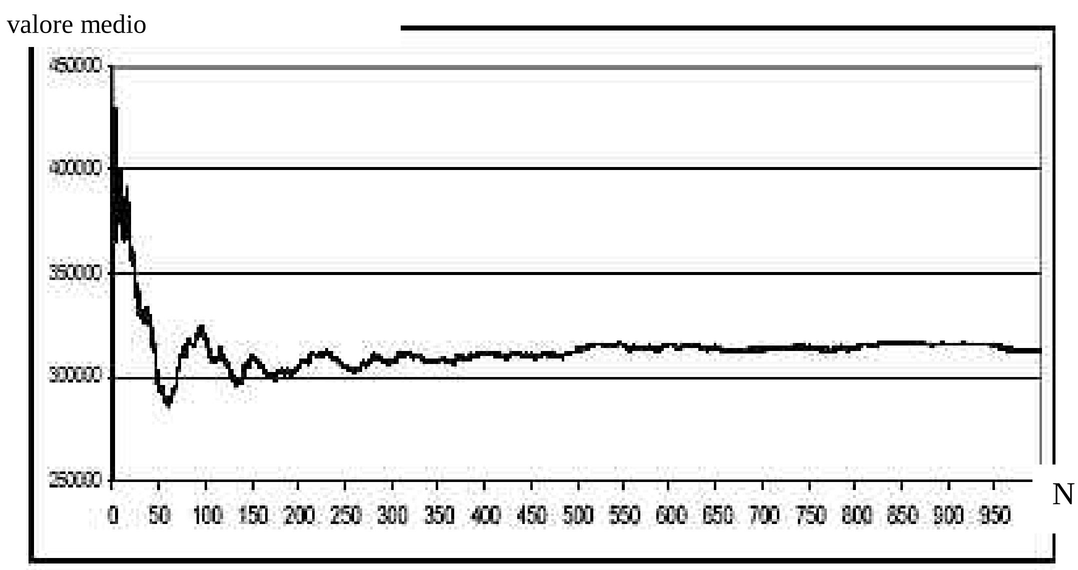


***fig. 3. La convergenza dell'output verso il valore "esatto" al crescere del numero di simulazioni N: un esempio applicato al valor medio***

---

[9] Su alcuni recenti metodi statistici per l'analisi della correlazione in condizioni di rischio v. anche Haas (1999).

Evidentemente, più alto è il numero N e più i risultati dell'output possono essere considerati "precisi". In linea di principio, dunque, basta aumentare il numero di simulazioni per ottenere un valore preciso a piacere. Con le attuali potenze di calcolo dei computer attuali possiamo affermare con tranquillità che fissare un numero N anche molto elevato non costituisce più un problema (se non in situazioni particolari). È anche possibile determinare il grado di attendibilità e precisione dell'output in relazione al valore di N scelto; ciò consente di fissare il valore di N minimo per poter avere un determinato grado di precisione[10].

## 4. Applicazione alla valutazione degli investimenti

Come dicevamo, la simulazione Monte Carlo viene proposta come uno strumento molto potente per il supporto alle decisioni di investimento in condizioni definite "di rischio" ossia nelle quali ai dati di partenza e ai possibili eventi rilevanti sia possibile assegnare rappresentazioni probabilistiche. Lo scopo della simulazione Monte Carlo è sostanzialmente quello di estendere l'applicabilità e la potenza rappresentativa dei metodi tradizionali di valutazione (come il PW).
A tale proposito, tra i *vantaggi* della simulazione Monte Carlo possiamo indicare i seguenti:
- si può modellizzare problemi di investimento di grande dimensione e/o molto complicati, e rappresentare dati e scenari a un livello di dettaglio fissato a piacere;
- si ottiene una rappresentazione statistica completa delle variabili di output (ad es. PW, TIR, ecc.) e non solamente pochi indicatori (ad es. solo la media);
- si può ottenere contemporaneamente il calcolo di più variabili di output (ossia indicatori usati per valutare l'investimento), il che consente al decisore di disporre al tempo stesso di più criteri per la valutazione;
- si può fornire al decisore stime o indicazioni del rischio associato all'investimento, misurato tramite gli indicatori statistici che descrivono la/le variabile/i di output, oppure usando rappresentazioni grafiche adeguate;
- si può testare diverse ipotesi sul modello e/o sui dati di input, ripetendo le simulazioni dopo aver introdotto le opportune modificazioni e analizzandone gli effetti sull'output. È quindi anche possibile condurre specifiche analisi di sensitività su singole variabili o dati di input.

Le *limitazioni* del metodo (cfr. Brealey *et al.* 1999) sono innanzitutto legate alle difficoltà a cui prima abbiamo accennato (la costruzione del modello, la stima delle probabilità da attribuire agli eventi aleatori) per affrontare le quali bisogna oltretutto considerare i costi dell'analisi (anche in termini di tempo) e la disponibilità di risorse (sistemi di calcolo, personale competente)[11]. Come dicevamo, la costruzione del modello rappresenta probabilmente l'aspetto più critico, dato che da esso dipendono poi i risultati che si ottengono. In generale, il metodo richiede competenze specifiche (tanto nella tecnica di simulazione in quanto tale, quanto in generale nell'analisi degli investimenti in condizioni di rischio);

---

[10] A questo riguardo, in Galvan (2004) si possono trovare i riferimenti ad alcuni metodi formulati nella letteratura.

[11] Da una ricerca su un campione di aziende che utilizzano tecniche probabilistiche, condotta da Ho e Pike (1992) risulta che la scelta di utilizzare tali tecniche non dipenda dal tipo di progetto (cioè strategico, di sostituzione, nuovo prodotto, ecc.), ma dalla percezione del rischio della direzione. I fattori determinanti sono la dimensione e la complessità del progetto, seguiti dall'incertezza sui flussi di cassa. Tra i problemi o barriere all'uso della tecnica Monte Carlo vengono citati nell'ordine: 1. Problemi di comprensione della tecnica (69% del campione) 2. Problemi di stime degli input (62%) 3. Impiego di tempo (61%) 4. Costi (57%) 5. Resistenze organizzative (56%) 6. Trade-off tra rischio e rendimento (56%) 7. Difficoltà di comprensione dell'output dell'analisi (55%). Per quanto riguarda il punto due sottolineiamo come la simulazione Monte Carlo richieda di disporre di una considerevole quantità di dati, rendendo di fatto necessario disporre di un sistema informativo di supporto adeguato.

inoltre, la costruzione del modello è in genere un procedimento *ad hoc* che va ripetuto per ciascun singolo progetto di investimento. Un ulteriore problema è rappresentato dall'*interpretazione* degli output, dato che la tecnica Monte Carlo ha come obiettivo quello di fornire non il valore sintetico di un singolo indicatore, ma output articolati e anche *multidimensionali* (ad es. descrizioni statistiche complete, indicatori multipli relativi allo stesso investimento, rappresentazioni di tipo diverso – numeriche e grafiche). Ai fini della decisione, la responsabilità dell'interpretazione dei risultati delle simulazioni ricade integralmente sull'analista e/o sul decisore[12]; a questo riguardo, è inoltre opportuno che questi siano consapevoli delle assunzioni utilizzate per costruire il modello, delle problematiche relative alla raccolta dei dati di input, e delle altre problematiche specifiche che sono state affrontate nello specifico caso in esame[13].

## Alcuni riferimenti essenziali


R. Aggarwal (1993), *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice Hall, Englewood Cliffs

J. Ansell, F. Wharton (1992), *Risk: analysis assessment and management*, John Wiley & Sons, Chichester

P. Boyle (1977), "Options: a Monte Carlo approach", *Journal of Financial Economics*, 4:323-338

R.A. Brealey, S.C. Myers, S. Sandri (1999), *Capital Budgeting*, Milano: McGraw-Hill Italia

U. Cherubini, G. Dalla Lunga (2001), *Il rischio finanziario*, McGraw-Hill, Milano

J. Clark, T. Hindelang, R. Pritchard (1989), *Capital budgeting: planning and control of capital expenditures*, Prentice-Hall International, Londra

A. Dixit, R. Pindyck (1994), *Investment under uncertainty*, Princeton university press, Princeton

K. Dowd (2002), *An introduction to market risk measurement*, John Wiley & Sons, New York

R. Eckhardt (1987), "Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method", *Los Alamos Science*, pp. 131-137.

I. Elishakoff (2003), "Notes on philosophy of Monte Carlo method", *International Applied Mechanics*, 39:3-14

R. Galvan (2004), *Un esercizio di simulazione Monte Carlo*, tesi di laurea triennale, DTG-Università degli Studi di Padova

G. Gottardi (1990), *Incertezza e rischio nella strategia tecnologica*, Cleup, Padova

J. H. Halton (1979), "A Retrospective and Prospective Survey of the Monte Carlo Method," *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 12, 1970, 1-63.

C.N. Haas (1999), "On Modelling Correlated Random Variables in Risk Assessment", *Risk Analysis*, vol. 19, n. 6

D. Hertz (1964), "Risk Analysis in Capital Investment", *Harvard Business Review*, 42:95-106

D. Hertz, H. Thomas (1983), *Risk analysis and its applications*, John Wiley & Sons, Chichester

P. Jackel (2002), *Monte Carlo methods in finance*, John Wiley & Sons, Chichester

C. Kelliher (2000), "Using Monte Carlo Simulation to Improve Long-Term Investment Decisions", *Appraisal Journal*, 68,1:44-57

F. Mason (1992), *Metodi quantitativi per le decisioni*, Giappichelli Editore, Torino


[12] A riguardo, interessante la provocatoria affermazione di Brealey *et al* (1999, p. 245): "ai manager non si può consigliare altro che l'attenta osservazione della distribuzione del PW fino a che non venga loro un'ispirazione. Nessuno può suggerire loro quale decisione prendere o che cosa fare se l'ispirazione non dovesse venire".

[13] A tale riguardo, anche alcuni articoli specialistici sottolineano il pericolo che i risultati delle simulazioni, magari se presentati in modo efficace e arricchiti di evocative rappresentazioni grafiche, diano la garanzia illusoria di "veridicità oggettiva" facendo passare in secondo piano le problematiche connesse con le assunzioni del modello e con l'assegnazione dei dati di input.

F. Mecatti, “Lezioni di metodi di simulazione”, www.statistica.unimib.it/utenti/mecatti/Dispensa.htm (accesso: agosto 2004)

N. Metropolis (1987), “The beginning of the Monte Carlo method”, *Los Alamos Science*, 15:125-130

N. Metropolis and S. Ulam (1949), “The Monte Carlo Method”, *Journal of American Statistical Assocciation*, vol. 44, pp. 335-341.

A. Micalizzi (1997), *Opzioni Reali: logiche e casi di valutazione degli investimenti in contesti di incertezza*, EGEA, Milano

D. Nawrocki (2001), “The Problems with Monte Carlo Simulation”, *Journal of Financial Planning*, 14, 11:92-108

B. Putnam, D. Handzy (2002), “Gambling on Monte Carlo”, *Global Investor*, 154:49-52

D. Vose (1996), *Risk analysis : a quantitative guide to Monte carlo simulation modeling*, Amsterdam: Elsevier