

# Programma del corso di Analisi 1

## Ingegneria Meccanica, Meccatronica e Gestionale

### Sede di Vicenza – Canale 2

DOTT. ANDREA CENTOMO

Anno accademico 2009/2010

Testi e sussidi:

1. M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, Ed. McGraw-Hill, 2007
2. A. Centomo, *Esercizi e complementi di Analisi 1*, 2009 (dispensa)
3. Appunti dalle lezioni
4. Sussidi online disponibili al sito <http://www.gest.unipd.it/~centomo/>
5. Sussidi per tutti i canali disponibili alla pagina della prof.ssa Paola Mannucci disponibili online <http://www.math.unipd.it/~mannucci/didattica/Analisi109.html> tra cui in particolare le note sulle serie e sulle funzioni in più variabili.

## 1 Elementi di base

- Simboli e operazioni sugli insiemi. Simboli logici. Prodotto cartesiano.
- Insiemi numerici:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ . Operazioni in  $\mathbb{Q}$ . Ordinamento in  $\mathbb{Q}$ . Proprietà di densità in  $\mathbb{Q}$  (con dimostrazione). Proprietà di Archimede in  $\mathbb{Q}$  (con dimostrazione). Lemma 1.1 non esiste  $x \in \mathbb{Q}$  tale che  $x^2 = 2$  (con dimostrazione).
- Insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ . Definizione 1.1 di numero reale con gli allineamenti decimali. Teorema 1.1 proprietà di densità di  $\mathbb{R}$ . Intervalli. Definizione 1.3 di maggiorante e minore. Definizione 1.4 di massimo e minimo. Definizione 1.5 di estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali. Caratterizzazione di estremo superiore e inferiore. Teorema 1.2 di esistenza del massimo e minimo per insiemi finiti (con dimostrazione). Lemma 1.2 di unicità del massimo (con dimostrazione). Teorema 1.3 di completezza di  $\mathbb{R}$ . Valore assoluto di un numero reale. La disuguaglianza triangolare (con dimostrazione). Somme e loro proprietà.
- Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli (con dimostrazione). Fattoriale e coefficiente binomiale. Formula del binomio di Newton.
- Funzioni reali di variabile reale. Definizione 2.1 di funzione, dominio, codominio, immagine, grafico. Dominio naturale. Definizione 2.3 di funzione limitata superiormente, limitata inferiormente e limitata con esempi. Definizione 2.6 di funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva con esempi. Definizione 2.7 di funzione composta con esempi. Definizione 2.8 di funzione inversa con esempi. Iniettività e invertibilità. Teorema 2.1 sulla composizione di funzione e sua inversa. Richiami sulle funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente. Le funzioni arcocoseno, arcoseno e arcotangente. Definizione 2.11 di funzione strettamente crescente, strettamente decrescente, crescente, decrescente, strettamente monotona, monotona. Funzione parte intera. Funzione segno. Gradino di Heaviside. Teorema 2.2 sull'invertibilità di una funzione strettamente monotona. Teorema 2.3 sulla composizione di funzioni monotone. Combinazione lineare di funzioni. Definizione 2.14 di funzione positiva (negativa) e strettamente positiva (negativa). Definizione 2.15 di valore assoluto, parte positiva e parte negativa di una funzione. Definizione 3.1 di funzione pari, dispari e periodica. Funzioni lineari. Potenze ad esponente naturale, radici n-esime, potenze ad esponente intero, razionale, reale, loro proprietà e grafici. Funzioni iperboliche (seno e coseno) e loro inverse (settore seno iperbolico e settore coseno iperbolico). Soluzione di disequazioni con metodo grafico.

## 2 Funzioni di una variabile

- Definizione 4.1 di metrica euclidea su  $\mathbb{R}$  e sue proprietà (con dimostrazione). Definizione 4.2 di intorno sferico. Proprietà di separazione. Retta estesa  $\mathbb{R}^*$ . Definizione 4.4 di intorno sferico di  $+\infty$  e  $-\infty$ . Definizione 4.5 di punto di accumulazione e di punto isolato. Lemma 4.1 proprietà dei punti di accumulazione. Relazione tra i concetti di estremo superiore (inferiore), punto di accumulazione e punto isolato. Teorema 4.1 di Bolzano-Weierstrass (traccia della dimostrazione). Definizione 4.7 di punto interno, esterno e di frontiera. Frontiera di un insieme. Definizione 4.8 di insieme aperto e chiuso. Intorno di un punto. Topologia euclidea su  $\mathbb{R}$  e sue proprietà. Definizione 4.11 di limite. Formulazioni della definizione di limite con descrizione esplicita degli intorni. Teorema 4.4 di unicità del limite (con dimostrazione). Infiniti e infinitesimi. Definizione 4.13 di punto di accumulazione destro e sinistro. Definizione 4.14 di limite destro e sinistro. Teorema di limitatezza locale (con dimostrazione). Lemma 4.2 della permanenza del segno (con dimostrazione). Teorema 4.5 algebra dei limiti per limiti finiti. Teorema 4.6 del confronto (con dimostrazione nel caso del limite finito). Teorema 4.7 sulle forme determinate. Forme indeterminate. Teorema 4.8 di esistenza del limite per funzioni monotone (con dimostrazione del caso funzione crescente e limite sinistro finito). Teorema 4.9 del limite della funzione composta. Controesempio per il Teorema 4.9. Primi limiti notevoli: Teorema 4.10 (con dimostrazione) e Corollario 4.1 (con dimostrazione). Teorema 4.11 sulle gerarchie di infiniti.
- Definizione 2.2 di successione reale. Definizione 5.1 di successione convergente, divergente e irregolare. Proposizione 5.1 sul limite di successioni reali. Gerarchie di infiniti. Dimostrazione che  $a^n/n!$  è infinitesima per  $n \rightarrow +\infty$ . Teorema 5.1 sulla crescita e sulla limitatezza della successione  $a_n = (1 + 1/n)^n$  (cenni alla dimostrazione). Definizione 5.2 di  $e$ . Definizione 5.3 di sottosuccessione. Teorema 5.2 sul legame tra il limite di una successione e delle sue sottosuccessioni. Teorema del rapporto per successioni (con dimostrazione).
- Definizione 6.1 di infinitesimo di ordine superiore e di infinitesimo dello stesso ordine. Esempi. Simbolo di Landau  $o(\cdot)$  piccolo e  $\sim$  asintotico. Infinitesimi non confrontabili. Algebra degli  $o(\cdot)$ . Definizione 6.3 di infinitesimo campione. Ulteriori limiti notevoli. Teorema 6.1 (Teorema ponte). Non esistenza di limiti.
- Somma della progressione geometrica di ragione  $p \neq 1$ . Serie numeriche. Definizione 5.7 di serie convergente, divergente e irregolare. Serie di Mengoli. Serie geometrica. Teorema 5.5 condizione necessaria di convergenza di una serie. Combinazione lineare di serie. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie a termini positivi. Teorema 5.8 sulla convergenza di serie a termini positivi. Teorema 5.9 criterio del confronto per serie a termini positivi (con dimostrazione). Teorema 5.11 criterio del rapporto. Teorema 5.12 criterio della radice. Criterio del confronto asintotico. Definizione 5.9 di serie assolutamente convergente. Teorema 5.13 la convergenza assoluta implica la convergenza semplice. Controesempio per il Teorema 5.13. Teorema 5.14 Criterio di Leibniz (con dimostrazione).
- Definizione 7.1 di funzione continua in un punto. Definizione 7.2 di funzione continua da destra e da sinistra. Una funzione è continua in  $x_0$  se e solo se è continua da destra e da sinistra in  $x_0$ . Continuità delle funzioni polinomiali, razionali, trigonometriche (seno (con dimostrazione), coseno e tangente), esponenziali e iperboliche. Teorema 7.2 di continuità della funzione composta. Definizione 7.3 di funzione continua in un insieme. Definizione 7.4 sulla classificazione dei punti di discontinuità. Teorema 7.3 sulle discontinuità di una funzione monotona definita su un intervallo. Teorema 7.4 degli zeri (con dimostrazione) e Corollario 7.1. Teorema 7.5 dei valori intermedi e Corollario 7.2. Teorema 7.6 monotonia e invertibilità per funzioni continue definite su intervalli. Teorema 7.7 di continuità della funzione inversa. Teorema 7.9 di Weierstrass.

- Definizione 8.3 di derivata in un punto. Definizione 8.2 di retta tangente al grafico in un punto. Teorema 8.2 la derivabilità implica la continuità (con dimostrazione). Definizione 8.4 derivabilità in un insieme. Definizione 8.5 di funzione di classe  $\mathcal{C}^1$  su un insieme. Definizione 8.6 tangente verticale a un grafico. Definizione 8.7 di derivata destra e sinistra. Definizione 8.8 di punto angoloso e cuspidale. Teorema 8.3 sull'algebra delle derivate. Teorema 8.4 di derivazione della funzione composta. Teorema 8.5 di derivazione dell'inversa. Derivata delle funzioni elementari. Calcolo delle derivate. Teorema 8.6 di Fermat (con dimostrazione). Definizione 8.9 di punto critico. Corollario 8.1 sui punti di estremo locale. Teorema 8.7 di Lagrange (con dimostrazione). Teorema 8.8 di Rolle (con dimostrazione). Monotonia e derivata. Teorema 8.10 sul rapporto tra monotonia e segno della derivata prima (con dimostrazione). Teorema di de l'Hopital e applicazioni al calcolo dei limiti. Definizione 8.10 di derivata  $n$ -esima. Definizione 8.11 di funzione convessa (concava) e strettamente convessa (concava). Teorema 8.15 sul rapporto tra segno della derivata II e convessità. Definizione 8.12 di punto di flesso. Teorema 8.16 sul rapporto tra zeri della derivata II e punti di flesso. Studi di funzione.
- Definizione 8.13 di polinomio di Taylor e MacLaurin. Teorema di 8.17 di Peano. Esempi 8.28, 8.29, 8.30 e 8.31 di calcolo di sviluppi di MacLaurin.
- Definizione 9.1 di suddivisione di un intervallo. Finezza di una suddivisione. Definizione 9.2 di somma superiore e inferiore. Lemma 9.1. Definizione 9.3 di funzione integrabile secondo Riemann. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo chiuso e limitato (funzioni continue, limitate con numero finito di discontinuità). Teorema 9.5 sulle proprietà dell'integrale definito. Teorema 9.6 della media integrale (con dimostrazione). Definizione 9.4 di funzione integrale. Teorema 9.7 fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). Definizione 9.5 di funzione primitiva. Teorema 9.8 due funzioni primitive differiscono per una costante e Corollario 9.1. Integrali elementari. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali (casi semplici). Definizione 9.6 di integrale generalizzato. Teorema 9.11 Criterio del confronto per integrali generalizzati. Teorema 9.2 Criterio del confronto asintotico. Definizione 9.7 di assoluta integrabilità in senso improprio. Teorema 9.12 la convergenza assoluta implica la convergenza semplice. Esempio 9.40 sull'integrabilità in senso improprio che non implica l'assoluta integrabilità. Teorema 9.13 Criterio integrale per serie a termini positivi e applicazioni.

### 3 Funzioni di più variabili e funzioni vettoriali

- Lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ : prodotto scalare euclideo, norma euclidea e metrica euclidea. Definizione 10.1 di intorno sferico. Punti interni, esterni e di frontiera. Definizione 10.2 di insieme limitato. Punto di accumulazione e isolato. Topologia standard su  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi chiusi. Intorno di un punto. Estensione di  $\mathbb{R}^n$  e intorni di infinito. Definizione 10.4 di limite per funzioni a valori scalari. Definizione 10.6 di funzione continua (caso delle funzioni a valori scalari). Calcolo di limiti per funzioni a valori scalari e Teorema 10.5. Coordinate polari nel piano. Limite e continuità per funzioni vettoriali. Curve.
- Definizione 11.1 di derivata direzionale. Definizione 11.2 di derivata parziale, di gradiente e nozione di derivabilità per funzioni a valori scalari. Definizione 11.16 di funzione differenziabile in un punto. Piano tangente. Derivate parziali di ordine superiore al primo. Teorema 11.7 di Schwarz. Matrice hessiana. Definizione 11.8 di punto critico. Criteri per la determinazione di punti di massimo e minimo locale. Punto di sella.